Série 2 - Analyse complexe

1 Analycité

Objectif : déterminer le domaine d'analycité de fonctions.

Théorie : analyse complexe.

Difficulté : ★☆☆☆ obligatoire.

Pour les fonctions complexes suivantes $f(z)$, calculer la dérivée $f'(z)$ et identifier le domaine dans lequel la fonction $f(z)$ est holomorphe :

(a) $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{z}$

(b) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$

(c) $f(z) = \dfrac{1}{z(z+1)}$

(d) $f(z) = e^{-1/z}$

(e) $f(z) = z^2 - 3z + 2$

(f) $f(z) = \tan(z)$

2 Singularités et résidus

Objectif : déterminer les singularités de fonctions et calculer les résidus.

Théorie : analyse complexe.

Difficulté : ★★☆☆ obligatoire.

Pour les fonctions complexes suivantes $f(z)$, identifier la nature de leurs singularités et calculer leurs résidus où $a > 0$:

(a) $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$

(b) $f(z) = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2+a^2}$

(c) $f(z) = \dfrac{z\,e^{iz}}{z^2 - a^2}$

(d) $f(z) = \dfrac{z^{-k}}{z+1}$ où $0 < k < 1$

3 Intégrales de contour

Objectif : évaluer des intégrales de contour.
Théorie : analyse complexe.
Difficulté : ☆☆☆★ obligatoire.

Evaluer les intégrales de contour suivantes :

(a) $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{5 - 4\cos\theta}\, d\theta\,,$ utiliser le changement du variable $z = e^{i\theta}$.

(b) $I = \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \ln(7 + \cos\theta)\, d\theta\,,$ utiliser le changement du variable $z = e^{i\theta}$ et factoriser l'argument du logarithme.

(c) $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x^2 + a^2}\, dx$ où $k > 0$, déformer le contour dans le plan complexe.

(d) $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^p}{1 + x^2}\, dx$ où $0 < p < 1\,,$ déformer le contour dans le plan complexe.

(e) $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx\,.$

4 Séries et intégrales de contour

Objectif : évaluer des séries à l'aide d'intégrales de contour.
Théorie : analyse complexe.
Difficulté : ☆☆☆☆ facultatif.

Evaluer les séries suivantes :

(a) $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$ en utilisant l'intégrale $I_N = \displaystyle\oint_{\mathcal{C}_N} f(z)\,\pi\cot(\pi z)\, dz$ où le chemin fermé $\mathcal{C}_N$ est un cercle de rayon $N + \frac{1}{2}$ autour de $z = 0\,.$

(b) $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ en utilisant l'intégrale $I_N = \displaystyle\oint_{\mathcal{C}_N} f(z)\,\pi\tan(\pi z)\, dz$ où le chemin fermé $\mathcal{C}_N$ est un cercle de rayon $N + \frac{1}{2}$ autour de $z = \frac{1}{2}\,.$

5 Mécanique des fluides en deux dimensions

⦿ **Objectif** : appliquer l'analyse complexe à l'étude des écoulements de fluide en deux dimensions.

📖 **Théorie** : analyse complexe.

✍ **Difficulté** : ★★★★ facultatif.

(a) Montrer que la partie réelle $u(x,y)$ et la partie imaginaire $v(x,y)$ de la fonction analytique $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ où $z = x + iy \in \mathbb{C}$ satisfont une équation de Laplace en deux dimensions,

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} = 0\,. \tag{1}$$

(b) L'écoulement d'un fluide irrotationnel en deux dimensions est décrit de manière commode par un potentiel complexe $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. La partie réelle $u(x,y)$ est appelé le potentiel des vitesses et la partie imaginaire $v(x,y)$ est surnommée la fonction de courant. Etant donné que le fluide est irrotationnel, sa vitesse $\boldsymbol{v}(x,y)$ est de la dérivée de la partie réelle $\boldsymbol{v}(x,y) = \boldsymbol{\nabla}\, u(x,y)$. Montrer que si la fonction $f(z)$ est analytique alors,

- $\dfrac{df(z)}{dz} = v_x(x,y) - iv_y(x,y)\,,$
- $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}(x,y) = 0$ (absence d'expansion) ,
- $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}(x,y) = \boldsymbol{0}$ (écoulement irrotationnel et non turbulent) ,

(c) Montrer que le potentiel complexe $f(z) = a\left(z + \dfrac{b^2}{z}\right)$ décrit un écoulement irrotationnel autour d'un objet circulaire. Donner une interprétation physique aux paramètres a et b.